В. К. Толстых

# Практическая оптимизация, идентификация распределённых систем

2024

Оглавление

[Оглавление 3](#_Toc161050386)

[Введение 6](#_Toc161050387)

[1 Особенности оптимизации, идентификации распределённых систем 11](#_Toc161050388)

[1.1 Что такое распределённая система 11](#_Toc161050389)

[1.2 Бесконечномерные задачи оптимизации 16](#_Toc161050390)

[1.3 Введение в прямой экстремальный подход 32](#_Toc161050391)

[1.3.1. Экстремальные алгоритмы нелинейной оптимизации 33](#_Toc161050392)

[1.3.2. Выбор направления минимизации, градиент 39](#_Toc161050393)

[1.3.3. Длина шага минимизации 49](#_Toc161050394)

[1.3.4. Помехи 57](#_Toc161050395)

[1.3.5. Завершение минимизации 60](#_Toc161050396)

[1.3.6. Квадратичность и выпуклость 63](#_Toc161050397)

[1.3.7. Ограниченность области управления 73](#_Toc161050398)

[2 Конечномерные параметры-управления в распределённых системах 76](#_Toc161050399)

[2.1 Постановка прямой экстремальной задачи 76](#_Toc161050400)

[2.2 Градиентный метод наискорейшего спуска 78](#_Toc161050401)

[2.3 Метод сопряжённых градиентов 80](#_Toc161050402)

[2.4 Метод Ньютона и квазиньютоновские методы 82](#_Toc161050403)

[2.5 Покомпонентные условия оптимальности 88](#_Toc161050404)

[2.6 Метод коллинеарных градиентов 92](#_Toc161050405)

[2.7 Метод с регулируемым направлением спуска 98](#_Toc161050406)

[2.8 Большая размерность. Тестирование 105](#_Toc161050407)

[3 Бесконечномерные параметры-управления 111](#_Toc161050408)

[3.1 Условия оптимальности 111](#_Toc161050409)

[3.2 Методы с регулируемым направлением спуска (МРНС) 117](#_Toc161050410)

[3.2.1. МРНСг, регулирование относительно градиента 117](#_Toc161050411)

[3.2.2. МРНСсг, регулирование относительно сопряжённых градиентов 123](#_Toc161050412)

[3.3 Регуляризация 124](#_Toc161050413)

[3.4 Градиент неявно заданного функционала 131](#_Toc161050414)

[3.4.1. Выделение ограничений на управление 135](#_Toc161050415)

[3.4.2. Линеаризация задачи 135](#_Toc161050416)

[3.4.3. Отображение линеаризованных уравнений в сопряжённые пространства 138](#_Toc161050417)

[3.4.4. Объединение задачи 149](#_Toc161050418)

[3.4.5. Учёт краевых условий 151](#_Toc161050419)

[3.4.6. Выделение градиента 157](#_Toc161050420)

[3.5 Управляемость 160](#_Toc161050421)

[3.5.1. Тип уравнений в частных производных 161](#_Toc161050422)

[3.5.2. Тип уравнений сопряжённой задачи 169](#_Toc161050423)

[3.5.3. Условия управляемости 172](#_Toc161050424)

[3.6 Управление с ограничениями 182](#_Toc161050425)

[3.6.1. Штрафные функции (тип 1.1) 185](#_Toc161050426)

[3.6.2. Дополнительные функционалы (тип 1.2) 187](#_Toc161050427)

[3.6.3. Проецирование на допустимое множество (тип 2.1) 187](#_Toc161050428)

[3.6.4. Изопериметрическое условие (тип 2.2) 189](#_Toc161050429)

[3.6.5. Кусочно-постоянное управление (тип 2.2) 192](#_Toc161050430)

[3.6.6. Ограничение на скорость изменения управления (тип 2.2) 193](#_Toc161050431)

[4 Особенности задач идентификации 196](#_Toc161050432)

[4.1 Общая постановка задачи 196](#_Toc161050433)

[4.2 Критерий качества идентификации 202](#_Toc161050434)

[4.3 Идентифицируемость 206](#_Toc161050435)

[5 Простейшая задача оптимального управления тепловыми процессами 211](#_Toc161050436)

[5.1 Постановка задачи 212](#_Toc161050437)

[5.2 Градиент целевого функционала 217](#_Toc161050438)

[5.2.1. Выделение ограничений на управление 217](#_Toc161050439)

[5.2.2. Линеаризация задачи 218](#_Toc161050440)

[5.2.3. Отображение линеаризованных уравнений в сопряжённые пространства 219](#_Toc161050441)

[5.2.4. Объединение задачи 221](#_Toc161050442)

[5.2.5. Учёт краевых условий 222](#_Toc161050443)

[5.2.6. Выделение градиента 222](#_Toc161050444)

[5.3 Управляемость 223](#_Toc161050445)

[5.4 Численное решение 228](#_Toc161050446)

[5.4.1. Конечно-разностные аппроксимации 228](#_Toc161050447)

[5.4.2. Оценка выпуклости целевого функционала 232](#_Toc161050448)

[5.4.3. Оптимизация без ограничений 234](#_Toc161050449)

[5.4.4. Оптимизация в заданном диапазоне управлений 243](#_Toc161050450)

[5.4.5. Оптимизация с ограничением на состояние 245](#_Toc161050451)

[5.4.6. Оптимизация с изопериметрическим ограничением 248](#_Toc161050452)

[5.4.7. Оптимизация с кусочно-постоянным управлением 250](#_Toc161050453)

[5.4.8. Оптимизация с ограничением на скорость изменения управления 253](#_Toc161050454)

[5.4.9. Оптимизация с помехами 254](#_Toc161050455)

[6 Идентификация параметров при формировании отливок 263](#_Toc161050456)

[6.1 Постановка задачи 263](#_Toc161050457)

[6.2 Градиент целевого функционала 269](#_Toc161050458)

[6.3 Идентифицируемость 274](#_Toc161050459)

[6.4 Численное решение 281](#_Toc161050460)

[6.4.1. Конечно-разностные аппроксимации 282](#_Toc161050461)

[6.4.2. Оценка выпуклости целевого функционала 285](#_Toc161050462)

[6.4.3. Решение тестовой задачи 287](#_Toc161050463)

[6.4.4. Решение прикладной задачи 291](#_Toc161050464)

[7 Оптимальное управление охлаждением непрерывного слитка 294](#_Toc161050465)

[7.1 Постановка задачи 294](#_Toc161050466)

[7.2 Градиент целевого функционала 303](#_Toc161050467)

[7.3 Управляемость 312](#_Toc161050468)

[7.4 Численное решение 316](#_Toc161050469)

[7.4.1. Постановка тестовой задачи 317](#_Toc161050470)

[7.4.2. Конечно-разностные аппроксимации 319](#_Toc161050471)

[7.4.3. Оценка выпуклости целевых функционалов 322](#_Toc161050472)

[7.4.4. Решение тестовой задачи 325](#_Toc161050473)

[7.4.5. Минимизация термонапряжений по функционалу $J1$ 329](#_Toc161050474)

[7.4.6. Минимизация термонапряжений по функционалу $J2$ 336](#_Toc161050475)

[7.4.7. Минимизация термонапряжений по функционалу $J3$ 339](#_Toc161050476)

[8 Идентификация параметров открытых русел 342](#_Toc161050477)

[8.1 Постановка задачи 342](#_Toc161050478)

[8.1.1. Характеристическая форма исходных уравнений 347](#_Toc161050479)

[8.2 Градиент целевого функционала 350](#_Toc161050480)

[8.2.1. Характеристическая форма сопряжённых уравнений 357](#_Toc161050481)

[8.3 Идентифицируемость 359](#_Toc161050482)

[8.4 Численное решение 365](#_Toc161050483)

[8.4.1. Конечно-разностные аппроксимации 366](#_Toc161050484)

[8.4.2. Оценка выпуклости целевого функционала 371](#_Toc161050485)

[8.4.3. Решение тестовой задачи 374](#_Toc161050486)

[8.4.4. Идентификация шероховатости Каракумского канала 383](#_Toc161050487)

[9 Оптимизация формы сопла гидропушки 389](#_Toc161050488)

[9.1 Постановка задачи 389](#_Toc161050489)

[9.1.1. Характеристическая форма исходных уравнений 395](#_Toc161050490)

[9.2 Градиент целевого функционала 397](#_Toc161050491)

[9.2.1. Характеристическая форма сопряжённых уравнений 407](#_Toc161050492)

[9.3 Управляемость 409](#_Toc161050493)

[9.4 Аппроксимация задач для численного решения 416](#_Toc161050494)

[9.4.1. Сетка аппроксимаций 416](#_Toc161050495)

[9.4.2. Аппроксимация исходной задачи 420](#_Toc161050496)

[9.4.3. Аппроксимация сопряжённой задачи 423](#_Toc161050497)

[9.4.4. Аппроксимация градиента 425](#_Toc161050498)

[9.5 Численное решение 425](#_Toc161050499)

[9.5.1. Оценка выпуклости целевого функционала 426](#_Toc161050500)

[9.5.2. Первый локальный максимум 428](#_Toc161050501)

[9.5.3. Второй локальный максимум 431](#_Toc161050502)

[Литература 435](#_Toc161050503)

[Предметный указатель 439](#_Toc161050504)

[Обозначения разделов 1–4 444](#_Toc161050505)

[Основные 444](#_Toc161050506)

[Индексы 446](#_Toc161050507)

[Пространства и множества 447](#_Toc161050508)

[Операции с множествами 449](#_Toc161050509)

[Операторы 449](#_Toc161050510)

[Греческие символы 451](#_Toc161050511)

[Специальные функции 453](#_Toc161050512)

[Сокращения 454](#_Toc161050513)

Введение

В современном мире эра экстенсивного развития человечества подходит к концу. Земные, людские, финансовые и другие ресурсы не бесконечны. Наступила эра интенсивного развития, эра повсеместной экономии природных ресурсов, энергии, рабочего времени, минимизации экологического ущерба, максимизации выгоды и многого другого. В основе интенсификации развития общества лежит *оптимизация* объектов и процессов, с которыми сталкивается человечество.

Для оптимизации, оптимального управления состоянием объектов необходимо иметь их математические модели, поскольку оптимальные состояния сначала ищут на моделях, а потом переносят на реальные объекты. Для достаточно качественной оптимизации работы объектов необходимо иметь не только хорошие методы оптимизации, но и хорошие математические модели этих объектов.

Большое количество объектов и процессов описываются с желаемой точностью только моделями пространственно-распределённых систем в виде дифференциальных уравнений с частными производными. Для таких моделей особенно актуальна *идентификация*, поскольку их параметры (коэффициенты уравнений) не всегда могут измеряться непосредственно, и даже известные табличные данные не всегда могут использоваться без надлежащей адаптации. Решение задачи идентификации должно давать оптимальную математическую модель.

Оптимизация пространственно-распределённых систем — это сложная задача. Здесь искомое решение (управление), как правило, представляет собой функцию, или несколько функций, зависящих от пространственных переменных и, возможно, от времени. Математические пространства, которым принадлежат такие управления, называются бесконечномерными.

В данной книге рассматривается и развивается прямой экстремальный подход для практического решения оптимизационных задач с распределёнными системами. Он заключается в том, что разнообразные категории задач, которые связанны с поиском оптимальных решений (оптимальное управление, оптимальные пространственные формы, оптимальная идентификация параметров уравнений), формулируются и решаются *однообразно*, как задача на поиск экстремума заданной цели оптимизации на основе её градиента.

Заметим, что в бесконечномерных пространствах цель оптимизации (критерий качества оптимизации) — это не функция, а функционал, неявно зависящий от управления, которое содержится в дифференциальных уравнениях распределённой системы. В свою очередь градиент, как первая производная от цели оптимизации, является не вектором, а функцией. Вычисление вторых производных, которые возможно могли бы улучшить сходимость к оптимуму, в таких сложных задачах до практической реализации не доходит.

В прямом экстремальном подходе для обобщения градиентного метода на бесконечномерные пространства вводится специальный параметр регулирования направления спуска (метод с регулируемым направлением спуска), который позволяет добиваться быстрой *равномерной* сходимости к оптимуму. В приведённых в данной книге примерах решения прикладных задач демонстрируется работоспособность и высокая эффективность такого подхода.

Поскольку в некоторых случаях в распределённых системах искомые управления всё же могут быть векторами, то во второй главе мы рассматриваем конечномерную ситуацию. Именно для таких задач, где допускается геометрическая интерпретация, нами вводится понятие параметра регулирования спуска и новая форма необходимых условий оптимальности. Новые условия формулируются не в точке оптимума, а в её окрестности, что имеет практическую ценность для определения параметра регулирования спуска. Предлагаемые необходимые условия и сопутствующие методы выбора параметра регулирования спуска обеспечивают формально градиентному алгоритму (метод первого порядка) сходимость как у метода Ньютона (метод второго порядка).

Все конечномерные методы тестируются на квадратичных функциях высокой размерности (до десяти тысяч). Выбор таких функций объясняется, во-первых, необходимостью дальнейшего обобщения полученных результатов на бесконечную размерность, т.е. на задачи минимизации функционалов. Во-вторых, в прикладных задачах функционалы, чаще всего, квадратичные или не значительно отличающиеся от квадратичных.

Полученные новые конечномерные алгоритмы (методы с регулируемым направлением спуска) демонстрируют практическую нечувствительность к размерности вектора управления для квадратичных функций. Данное обстоятельство позволяет обобщить методы на бесконечные задачи, что и сделано в третьем разделе данной книги. При описании теории прямого экстремального подхода в бесконечномерных пространствах показано, что параметр регулирования спуска является и параметром регуляризации решения, в общем случае, некорректных задач оптимизации. Это позволило ввести новое, относительно легко реализуемое, понятие управляемости (идентифицируемости), что актуально для корректной постановки и решения задач оптимизации с распределёнными системами.

В четвёртом разделе акцентируются внимание на особенностях задач параметрической идентификации распределённых систем. Показано, что такие задачи полностью укладываются в описанную ранее схему оптимизации параметров математической модели прямым экстремальным подходом.

Начиная с пятого раздела и до конца книги обсуждаются прикладные задачи оптимизации, оптимального управления, идентификации для пространственно-распределённых систем с точки зрения разработанной теории прямого экстремального подхода. В пятом разделе, как основном тестовом разделе, приводятся многочисленные примеры реализации простейшей тепловой задачи оптимального управления с разнообразными ограничениями и помехами.

Все прикладные задачи программировались и реализовывались автором в среде Delphi 7.

Книга рассчитана на читателя, владеющего основами математического анализа и численных методов. Полезно также иметь общее представление о вариационном исчислении и функциональном анализе, а именно, что такое вариация, основные свойства линейных функциональных пространств и операторов в них. Последнее не является строго обязательным и по мере появления в излагаемом материале подобных понятий, автор попытается в доходчивой форме дать их пояснение.

Поскольку книга сопровождается, как нам кажется, простыми разъяснениями многих классических математических понятий и снабжена многочисленными конкретными примерами, то данную монографию можно считать и учебным пособием.

Для того, чтобы с учебным пособием было удобнее работать (в том числе и студентам старших курсов, магистрантам), основные понятия излагаемого материала в конце книги собраны в обширный предметный указатель. Также в конце книги приведены принятые обозначения и сокращения.